Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

факультет кібернетики

Оцінки параметрів в умовах невизначеності

д.ф.-м.н. Наконечний О.Г.,

к.ф.-м.н. Зінько П.М.

$$x_k \in R^1,\ k = 0,1,\dots,N. \qquad\qquad x_{N+m} - ?$$

1. Статистичний підхід

Прогнозна оцінка $\hat{x}_{N+m} = g(x_0,\dots,x_N)$.

С.к. похибка

$$\sigma(g) = \left\{ E\left(x_{N+m} - \hat{x}_{N+m} \right)^2 \right\}^{1/2}. \tag{1}$$

Оптимальний с.к. прогноз

$$\min_g \sigma(g) = \sigma(\hat{g}). \tag{2}$$

$$\hat{g} = E\, {x_{N+m}} \big/ {x_0,\dots,x_N} \tag{3}$$

Оптимальний прогноз с.к. на класі G

$$\min_{g\in G} \sigma(g) = \sigma(\hat{g}_G). \tag{4}$$

Приклад 1.

1) $$G_1 = \left\{ g_1 : g_1 = \sum_{k=0}^{N} u_k x_k + c \right\} \qquad (5)$$

Оптимальний лінійний с.к. прогноз

$$\min_{g_1} \sigma(g_1) = \sigma(\hat{g}_1). \qquad (6)$$

2) $$G_2 = \left\{ g_2 : g_2 = g_1 + \sum_{k,j} u_{kj} x_k x_j \right\} \qquad (7)$$

Оптимальний квадратичний с.к. прогноз

Рівняння для 1)

$$\begin{cases} E\hat{g}_1 = Ex_{N+m} \\ E\hat{g}_1 x_j = Ex_{N+m} x_j \end{cases} \tag{8}$$

Рівняння для 2)

$$\begin{cases} E\hat{g}_2 = Ex_{N+m} \\ E\hat{g}_2 x_j = Ex_{N+m} x_j \\ E\hat{g}_2 x_j x_s = Ex_{N+m} x_j x_s \end{cases} \tag{9}$$

$$\sigma(\hat{g}_2) \le \sigma(\hat{g}_1) \tag{10}$$

$x_0, ..., x_N, ..., x_{N+m}$ – гаусів розподіл!!

$$E \, {}^{x_{N+m}}\!\big/_{x_0,...,x_N} = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k x_k + \hat{c} \tag{11}$$

Розподіл $P, x_0, ..., x_N, ..., x_{N+m}$ – невідомий і належить множині P .

Гарантована прогнозна оцінка

$$\min_{g} \max_{P} \sigma(g, p) = \max_{p \in P} \sigma(\hat{g}, p) \tag{12}$$

Приклад 2.

$Ex_k = m_k, \;\; m_k$ – невідомі

$|m_k| \le \gamma_k$

$E(x_k - m_k)(x_j - m_k) = r_{kj}$ – відомі

$$\max_P \sigma(g_1, p) = \left(\gamma_{N+m} + \sum_{k=0}^{N} |u_k| \gamma_k + |c| \right)^2 + \left(Ru, u \right) = F(u, c) \tag{13}$$

$$F(u, c) \to \min$$

Оцінки середнього значення

$$x_k = m_k + x_k - m_k = m_k + \eta_k, \quad k = 0, \ldots, N$$

η_k – гаусові, $E\eta_k = 0, \quad E\eta_k\eta_s = r_{ks}, \quad R = (r_{k,s})_{k,s=0}^{N}$, $\det R \neq 0$.

Метод максимальної вірогідності

$$\Phi(m) = \left(R^{-1}(x-m), x-m\right) \tag{14}$$

$$\min_m \Phi(m) = 0$$

$$\hat{m}_k = x_k$$

Гарантовані оцінки

Невідомі m_k, r_{kj}

$$m \in M = \left\{ m : \sum_{k=0}^{N} (m_{k+1} - m_k)^2 q_k^2 \le \gamma^2 \right\} \tag{15}$$

$$V = \left\{ R : \sum_{k=0}^{N} r_{kk} q_k^2 \le \delta^2 \right\}$$

$$\hat{m}_N = \sum_{j=0}^{N} u_j x_j + c$$

$$\sigma(u,c) = \max_{V,M} \left\{ E \left| m_N - \hat{m}_N \right|^2 \right\}^{1/2} \tag{16}$$

$$\min_{u,c} \sigma(u,c) = \left\{ \max_{V,M} E \left| m_N - \bar{m}_N \right|^2 \right\}^{1/2} \tag{17}$$

$$\bar{m}_{k+1} = \bar{m}_k + s_k (y_{k+1} - \bar{m}_k) \tag{18}$$

$\bar{m}_0 = y_0$.

Фільтр Калмана!!!

Оцінка $\overline{m}_{k+1}$ – зміщена

$$E\overline{m}_{k+1} \neq m_k$$

$\theta_k = m_k - \overline{m}_k$ – зміщення

$$\theta_{k+1} = (1 - s_k)\theta_k + f_k \tag{19}$$

$$\theta_0 = f_0 \ \sum_{k=0}^{N} f_k^2 q_k^2 \leq \gamma^2, \quad f_k = m_{k+1} - m_k .$$

Детермінована невизначеність

$$x_k = m_k + v_k, \quad k = 0,1,\dots,N \tag{19}$$

m_k – невідомі, v_k – невідомі похибки вимірювань.

$$\left|m_{k+1} - m_k\right| \le \gamma_k, \quad \left|v_k\right| \le \sigma_k, \tag{20}$$

$g(x_0,\dots,x_N)$ – оцінка m_N.

$$\min_{g} \max_{v_k, m_k} \left| m_N - g \right| = \min_{g_1} \max \left| m_N - g_1 \right|$$

$$g_1 = \sum u_k x_k + c \tag{22}$$

$$V_1 = \left\{ (m, v) : \Phi(m, v) \le 1 \right\} \tag{23}$$

$$\Phi(m, v) = \sum_{k=0}^{N} (m_{k+1} - m_k)^2 q_k^2 + \sum_{k=0}^{N} v_k^2 \sigma_k^2 .$$

Апріорна оцінка $\bar{m}_N$

Розв’язок рівняння

$$\bar{m}_{k+1} = \bar{m}_k + S_k (y_{k+1} - \bar{m}_k) - \text{фільтр Калмана} \tag{24}$$

Апостеріорні оцінки

$$\left|m_{k+1}-m_k\right|\le\gamma_k\,,\ \left|v_k\right|\le\delta_k\,,\quad k=0,1,\ldots,N$$

$$M=\left\{\vec{m}:\left|m_{k+1}-m_k\right|\le\gamma_k\,,\ k=0,1,\ldots,N\right\}$$

$$V_y=\left\{\vec{m}:\left|x_k-m_k\right|\le\delta_k\,,\ k=0,1,\ldots,N\right\}$$

$M\bigcap V_y=M_y$ – апостеріорна множина

M_y – опукла множина

За оптимальну оцінку можемо взяти

$$\bar{m}_k=\frac{1}{\mu(M_y)}\int\limits_{M_y}m_k dm \tag{25}$$

Якщо обмеження

$$V_2 = \left\{(m,v) : \Phi(m,v) \le 1\right\}, \tag{26}$$

то фільтр Калмана, а похибки оцінки

$$\sigma_N = \left(1 - \Phi(\bar{m}, x - \bar{m})\right)^{1/2} \sigma_1(\hat{u}, \hat{c}) \le \sigma_1(\hat{u}, \hat{c}) \tag{27}$$

Приклад 3.

$$x_k = \alpha + v_k, \quad k = 1,2$$

$$|v_k| \le 1$$

Апріорні оцінки

$$\begin{gathered} \hat{\alpha} = \hat{u}_1 x_1 + \hat{u}_2 x_2 \\ 0 \le \hat{u}_1 \le 1 \quad \hat{u}_2 = 1 - \hat{u}_1 \end{gathered} \tag{28}$$

Похибка

$$\max_{\alpha, v} |\alpha - \hat{\alpha}| = 1 \tag{29}$$

Апостеріорні оцінки

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\max x_k + \min x_k\right] \tag{30}$$

Апостеріорна похибка

$$\sigma_a = \frac{\min x_k - \max x_k}{2} + 1 = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$x_{k+1} = g_k(x_k, \theta) + \sigma_k(x_k) v_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Phi(v_1, \ldots, v_N) = \sum_{k=0}^{N} v_k^2 q_k^2 \le \gamma_N^2, \quad \theta \in \Theta \subseteq R^m \tag{31}$$

Апостеріорна множина

$$G_y(\theta) = \left\{ \theta : \sum_{k=0}^{N} \left(x_{k+1} - g_k(x_k, \theta) \right)^2 \sigma_k^{-2}(x_k) \le \gamma_N^2 \right\} \bigcap \Theta \tag{32}$$

Приклад 4.

$$x_{k+1} = x_k\theta + v_k \tag{33}$$

$$\sum_{k=0}^{N} v_k^2 \le \gamma_N^2, \quad \theta \in R^1 \tag{34}$$

Апостеріорна множина

$$G_y = \left[\theta_1, \theta_2\right]$$

$$\theta_1 = -\gamma_N \left\{ \sum_{k=0}^{N} x_k^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} + \hat{\theta}_N \tag{35}$$

$$\theta_2 = \gamma_N \left\{ \sum_{k=0}^{N} x_k^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} + \hat{\theta}_N \tag{36}$$

$$\hat{\theta}_N = \left(\sum_{k=0}^{N} x_{k+1} x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{N} x_k^2 \right)^{-1} \tag{37}$$

Апостеріорна похибка

$$\min \max_{\theta \in G_y} \left| \theta - \hat{\theta} \right| = \max_{\theta \in G_y} \left| \theta - \hat{\theta}_N \right| = \gamma_N \left(\sum_{k=0}^{N} x_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Література

Наконечний О.Г. Оцінювання параметрів в умовах невизначеності. КНУ, Наукові записки. Том VII. 2004. –с. 102-111.

Дякую за увагу!